

УДК 517.6

Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, М. А. Максимова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ЭКРАНАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ¹

Аннотация. Рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны на бесконечно тонком идеально проводящем экране. Задача сведена к интегродифференциальному уравнению. Предложен метод Галеркина. Получены численные результаты.

Ключевые слова: электромагнитная задача дифракции, краевая задача, интегральное уравнение, численный метод.

Abstract. The article considers a problem of diffraction of electromagnetic wave on the infinitely thin and perfectly conducting screen. The problem is reduced to an integro-differential equation. The authors suggest the Galerkin method and present the numerical results.

Key words: electromagnetic problem of diffraction, boundary value problem, integral equation, numerical method.

Введение

Решение трехмерных векторных задач дифракции является в настоящее время одной из самых актуальных проблем в электродинамике. Решение этих задач с приемлемой для практики точностью на электродинамическом уровне строгости математическими методами требует очень большого объема вычислений и часто невозможно даже на самых современных компьютерах. Существующие в настоящее время многочисленные пакеты прикладных программ (Ansis, Quickwave и т.д.) не дают требуемой точности, поскольку используют методы конечных элементов. И особенно остро стоит проблема решения задач дифракции в резонансном диапазоне частот. При решении краевых задач в неограниченных областях конечно-разностные методы и методы конечных элементов встречают принципиальные трудности: область, в которой решается задача, должна быть сделана конечной. Такая редукция области приводит к появлению неконтролируемой ошибки, причем размеры области для ее уменьшения должны быть достаточно велики. Конечно-разностные методы и методы конечных элементов в такой ситуации обычно приводят к очень большим, но разреженным матрицам (порядка 10^9 и более). Одним из перспективных методов решения задач в ограниченных областях является метод поверхностных интегральных уравнений [1]. В этом случае задача сводится к интегральному или интегродифференциальному уравнению в области неоднородности, которая по размерам существенно (на порядки) меньше области решения задачи, в случае применения конечно-разностных методов и методов конечных элементов. После дискретизации получается конечномерная система уравнений с плотной (заполненной) матрицей. Таким образом, второй путь приводит

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., соглашение № 14.B37.21.1950.

к необходимости решать системы уравнений с плотными матрицами, но существенно меньших порядков.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2 = \{x_3 = 0\} \subset R^3$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ , состоящей из конечного числа простых дуг класса C^∞ , сходящихся под углами, отличными от нулевого. Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля E^0, H^0 на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω , расположенном в свободном пространстве с волновым числом $k, k^2 = \omega^2 \mu(\epsilon + i\sigma\omega^{-1})$, $\text{Im } k \geq 0$ ($k \neq 0$), состоит в определении рассеянного электромагнитного поля

$$E, H \in C^2(R^3 \setminus \bar{\Omega}) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{R}_+^3 \setminus \Gamma_\delta) \bigcap_{\delta > 0} C(\bar{R}_-^3 \setminus \Gamma_\delta), \quad (1)$$

удовлетворяющего:

– однородным уравнениям Максвелла:

$$\text{Rot } H = -ikE,$$

$$\text{Rot } E = ikH, \quad x \in R^3 \setminus \bar{\Omega}; \quad (2)$$

– краевым условиям для касательных составляющих электрического поля на поверхности экрана:

$$E_\tau|_\Omega = -E_\tau^0|_\Omega; \quad (3)$$

– условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$E, H \in L_{loc}^2(R^3) \quad (4)$$

– условиям на бесконечности (условиям Зоммерфельда):

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} - ik \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = o(r^{-1}), \quad \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = O(r^{-1}), \quad r: |x| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Для полного поля $E^{\text{полн}} = E^0 + E$, $H^{\text{полн}} = H^0 + H$.

Будем предполагать, что все источники падающего поля находятся вне экрана $\bar{\Omega}$ так, что для некоторого $\delta > 0$

$$E^0 \in C^\infty(\Omega_\delta), \quad \Omega_\delta = \{x: |x - y| < \delta, y \in \Omega\}, \quad (6)$$

откуда следует, что

$$E_\tau^0|_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (7)$$

Обычно падающее поле – это либо плоская волна, либо электрический или магнитный диполь, расположенный вне $\bar{\Omega}$. В этих случаях условия (6), (7) выполнены. Поле E^0, H^0 является решением системы уравнений Максвелла в свободном пространстве без экрана.

Имеет место утверждение единственности для поставленной задачи.

Утверждение 1 [2]. Задача (1)–(5) при $\operatorname{Im} k \geq 0, k \neq 0$, имеет не более одного решения.

Заметим, что утверждение сохраняет силу и для системы из конечного числа непересекающихся экранов.

2. Свойства решений уравнений электрического поля

Ниже кратко приведем основные результаты о разрешимости задачи (1)–(5). Для изучения задачи дифракции на экране Ω введем векторное пространство распределений W . Положим для любого вещественного s [3]

$$H^s(\Omega) := \{u|_{\Omega} : u \in H^s(R^2)\},$$

$$\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \{u \in H^s(R^2) : \operatorname{supp} u \subset \bar{\Omega}\}.$$

Скалярное произведение и норма в $H^s(R^2)$ определяются обычным образом:

$$(u, v)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi, \quad \|u\|_s^2 = (u, u)_s; \quad \langle \xi \rangle := (1 + \|\xi\|^2)^{1/2}.$$

Здесь и всюду ниже, где не указана область интегрирования, подразумевается интеграл по R^2 . $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$ является (замкнутым) подпространством $H^s(R^2)$ с индуцированными скалярным произведением и нормой. Далее $H^s(\Omega) = H^s(R^2) / \tilde{H}^s(\bar{\Omega})$; в $H^s(\Omega)$ вводится скалярное произведение и норма факторпространства. Пространства $H^{-s}(\Omega)$ и $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$ антидвойственны друг к другу при всех $s \in R$; $\tilde{H}^s(\bar{\Omega})$ можно получить замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $H^s(R^2)$ [3].

В дальнейшем нас будут интересовать главным образом пространства вектор-функций, поэтому через u, v будем обозначать векторы $u = (u_1, u_2)^T$, $v = (v_1, v_2)^T$ и т.д. При этом H^s в записи $u \in H^s$ уже понимается как декартово произведение двух экземпляров пространства H^s со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_s = (u_1, v_1)_s + (u_2, v_2)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = \|u_1\|_s^2 + \|u_2\|_s^2 = \int \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Сохраним те же обозначения для пространств в векторном случае, так как во всех ситуациях из контекста ясно, о каком пространстве идет речь.

Определим гильбертово пространство $W = W(\bar{\Omega})$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_W^2 = \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} |\xi \cdot \hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_W = \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi + \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} \left(\xi \cdot \hat{u}(\xi) \right) \left(\overline{\xi \cdot \hat{v}(\xi)} \right) d\xi,$$

где $\hat{u}$ обозначает преобразование Фурье распределения u .

Утверждение 2 [2]. $W = \{u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega}) : \operatorname{div} u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{\Omega})\}$.

Норма в W может быть записана в виде

$$\|u\|_W^2 = \|u\|_{-1/2}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{-1/2}^2.$$

Определим пространства W_1 и W_2 как подпространства W с условиями:

$$W_1 := \{u \in W : \forall \xi \quad \xi_1 \hat{u}_1(\xi) + \xi_2 \hat{u}_2(\xi) = 0\};$$

$$W_2 := \{u \in W : \forall \xi \quad \xi_2 \hat{u}_1(\xi) - \xi_1 \hat{u}_2(\xi) = 0\},$$

$\hat{u}_i(\xi) \in C^\infty(R^2)$, и определение имеет смысл.

Для пространства $W' := (W(\bar{\Omega}))'$ антидвойственного к W , имеем

Утверждение 3 [2]. Пространство W' определяется следующим образом:

$$W' = \left\{ f|_\Omega : f \in H^{-1/2}(R^2), \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \in H^{-1/2}(R^2) \right\}.$$

3. Векторные потенциалы и представление решений

Наиболее естественным и эффективным способом решения задач (1)–(5) является представление полей E, H с помощью векторного потенциала [2]

$$E = ik^{-1} \left(\operatorname{Grad} \operatorname{div} (A_1 u) + k^2 A_1 u \right), \quad (8)$$

$$H = \operatorname{Rot} (A_1 u); \quad (9)$$

$$A_1 u = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy; \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (10)$$

Вектор $u = (u^1, u^2)^T$ имеет смысл плотности тока на поверхности экрана на Ω .

Будем предполагать, что

$$u \in W(\bar{\Omega}) \quad (11)$$

и

$$u, \operatorname{div} u \in C^1(\Omega). \quad (12)$$

Известно, что [2]

$$\operatorname{div}(A_1 u) = A_1(\operatorname{div} u), \quad x \notin \bar{\Omega}; \quad u \in W.$$

Тогда (8) эквивалентно

$$E = ik^{-1} \left(\operatorname{Grad} A_1(\operatorname{div} u) + k^2 A_1 u \right), \quad x \in R^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (13)$$

Краевое условие (3) приводит к интегродифференциальному уравнению для u . Опуская точку x на Ω , из (13) получаем

$$\operatorname{grad} A(\operatorname{div} u) + k^2 Au = f; \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega; \quad (14)$$

$$Au = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy; \quad (15)$$

$$f = 4\pi ik E_{\tau}^0|_{\Omega}; \quad f \in C^{\infty}(\bar{\Omega}). \quad (16)$$

Здесь операция grad рассматривается в R^2 .

4. Базисные функции

В качестве базисных функций будем использовать прямоугольные функции-крышки, заданные ниже. Функции-крышки определяются для пар смежных прямоугольных ячеек сетки, разбитой на прямоугольники, как изложено ниже [4]. Для пар прямоугольников P^+ и P^- , которые имеют общую грань I_n , функция формы $f_n(x)$ определяется как

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{L}{A^+} (x - p^+) \hat{u}^+, & \text{если } x \in P^+, \\ -\frac{L}{A^-} (x - p^-) \hat{u}^-, & \text{если } x \in P^-, \end{cases}$$

где L является длиной грани I_n ; A^+ и A^- есть площади P^+ и P^- соответственно, а p^+ , p^- и единичные векторы $\hat{u}^+$, $\hat{u}^-$ определены, как показано на рис. 1.

5. Метод Галеркина

Для операторных уравнений в гильбертовых пространствах проекционный метод, строящийся с помощью ортопроекторов на конечномерные под-

пространства, приводит к методу Галеркина. Пусть X и Y – гильбертовы подпространства и $A: X \rightarrow Y$ – инъективный линейный ограниченный оператор. Пусть $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – последовательность подпространств таких, что $\dim X_n = \dim Y_n = n$, и пусть $P_n: Y \rightarrow Y_n$ – последовательность ортопроекторов. Тогда $\varphi_n \in X_n$ будет приближенным решением уравнения $A\varphi = f$ с помощью проекционного метода, образованного посредством выбора пространств X_n и проекторов P_n , тогда и только тогда, когда

$$(A\varphi_n, g) = (f, g), \text{ для любого } g \in Y_n. \quad (17)$$

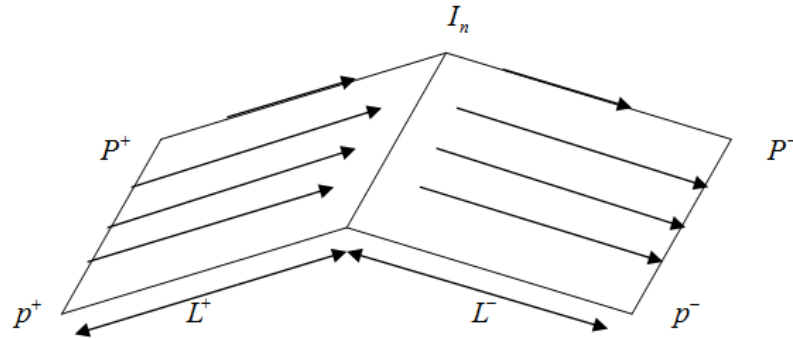


Рис. 1. Базисные функции «rooftop»

Действительно, выражение (17) эквивалентно уравнению $P_n(A\varphi_n - f) = 0$. Уравнение (17) называют уравнением Галеркина.

Допустим, что подпространства X_n и Y_n являются линейными оболочками базисных и тестовых функций $X_n = \text{span}\{z_1, \dots, z_n\}$, $Y_n = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Представим φ_n в виде линейной комбинации базисных функций

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k z_k$$

и подставим это выражение в формулу (17).

В результате получим эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений порядка n

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Az_k, v_j) = (f, v_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (18)$$

относительно неизвестных коэффициентов γ_k .

6. Свойство аппроксимации подпространств базисных функций «rooftop»

Рассмотрим вопрос об аппроксимации непрерывно-дифференцируемой (векторной) функции $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, $f \in C_0^1(\Pi)$

$(f_1 \in C_0^1(\Pi), f_2 \in C_0^1(\Pi))$, в прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ «roof-top» базисными функциями $\varphi_j(x, y)$ по методу, предложенному в статье [4]. Рассмотрим в Π равномерную прямоугольную сетку с шагами h_1 и h_2 по осям x и y с узлами $M_{ij} = (x_i, y_j)$, $x_i = ih_1$, $y_j = jh_2$ ($i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2$), $h_1 = \frac{a}{N_1}$, $h_2 = \frac{b}{N_2}$. Базисную функцию $\varphi_j(x, y)$, отвечающую ребру j , определим по правилу (рис. 2):

$$\varphi_j(x, y) = \begin{cases} \left(x - x_1^{(j)}, 0 \right) \frac{l_j}{S_j^+} \text{ в } \Pi_j^+, \\ \left(x_2^{(j)} - x, 0 \right) \frac{l_j}{S_j^-} \text{ в } \Pi_j^-; \\ \left(0, y - y_1^{(j)} \right) \frac{l_j}{S_j^+} \text{ в } \Pi_j^+, \\ \left(0, y_2^{(j)} - y \right) \frac{l_j}{S_j^-} \text{ в } \Pi_j^-, \end{cases} \quad (19)$$

$\varphi_j \equiv 0$ вне прямоугольников Π_j^+, Π_j^- . Здесь l_j – длина j -го ребра; $S_j^\pm$ – площадь прямоугольника $\Pi^\pm$.

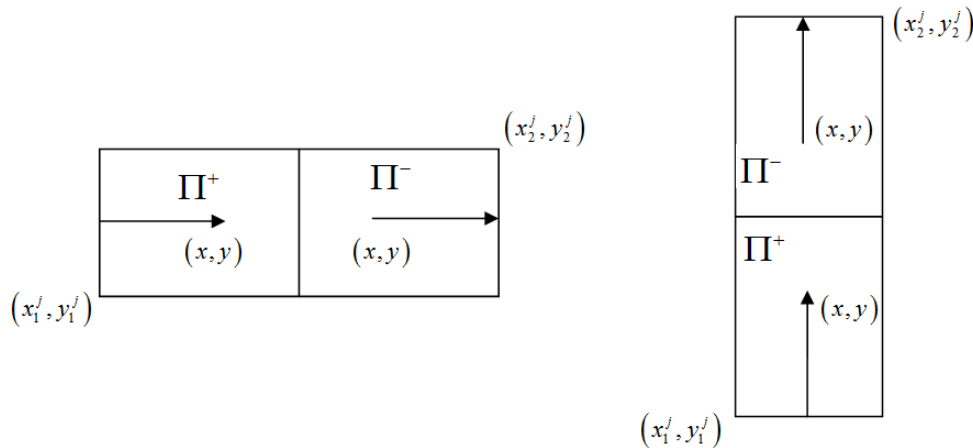


Рис. 2. Вид базисных функций на плоскости

Рассмотрим конечномерное подпространство $X_N = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$, являющееся линейной оболочкой базисных функций φ_j , $1, \dots, N$, где N – количество внутренних ребер сетки. Нетрудно проверить, что $\varphi_j \in W(\Pi)$, $X_N \subset W$. Имеет место следующий результат.

Теорема 1 [5]. Для любого $\varphi \in W$ верна оценка $\inf_{\psi \in X_N} \|\psi - \varphi\|_W \rightarrow 0$,
 $N \rightarrow \infty$, и верна оценка

$$\inf_{\psi \in X_N} \|\psi - \varphi\|_W \leq C_0 (h_1 + h_2) \|\varphi\|_{C^2(\bar{\Pi})}, \quad (20)$$

где C_0 не зависит от h_1 и h_2 , если $\varphi \in W \cap C^2(\bar{\Pi})$.

7. Расчет матричных элементов для экрана канонической формы

Для решения реальных физических задач требуется вычислять матрицы как можно большего размера, поэтому остро стоит вопрос об оптимизации расчета базисных элементов. Наиболее естественным способом сокращения вычислений является учет матричной симметрии элементов, также удобно применить параллельный алгоритм. Рассматриваемые матрицы являются ганкелевыми. Рассмотрим процедуру заполнения матричных элементов для прямоугольного экрана канонической формы.

Произведем заполнение матрицы, используя матричное уравнение $(A\varphi_n, g) = (f, g)$. Каждый элемент матрицы получается путем вычисления четырехкратного интеграла

$$l_{ij} = - \int_{\Omega} G(x, y) \operatorname{div} \varphi_i(x) \cdot \operatorname{div} \bar{\varphi}_j(y) ds + k^2 \int_{\Omega} G(x, y) \varphi_i(x) \cdot \bar{\varphi}_j(y) ds,$$

имеющего особенность в области интегрирования. Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, а $G(x, y)$ – известная функция $G(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|}$. В качестве базисных функций $\varphi_i(x)$ и тестовых $\varphi_j(y)$ выберем функции, предложенные в статье [4].

Пример расчетной сетки, на которой решалась матрица, представлен на рис. 3. Сначала нумеруются вертикальные ребра, затем горизонтальные.

Для того чтобы избежать возникновения ситуации, приводящей к делению на ноль, возможной в связи с особенностью в функции $G(x, y)$, предлагается разнести внутренние узлы в квадратурной формуле. Например, для горизонтальных носителей возьмем точность интегрирования на носитель, равную n , а для вертикальных – $(n + 2)$.

Численные результаты

Первыми были получены результаты на квадратной пластине. Длина ребра квадратной пластины была равна длине волны λ . Волновое число k равняется 2π .

Для рис. 4 и 5 была рассмотрена задача с размером сетки 34 на 33 и точностью расчета интеграла 16 точки на носитель. Рисунок 4 отображает поведение поверхностных токов, направленных вдоль оси Ox . Рисунок 5 отображает поведение поверхностных токов, направленных вдоль оси Oy .

	49	50	51	52	53	54	55	
104	105	106	107	108	109	110	111	
	42	43	44	45	46	47	48	
96	97	98	99	100	101	102	103	
	35	36	37	38	39	40	41	
88	89	90	91	92	93	94	95	
	28	29	30	31	32	33	34	
80	81	82	83	84	85	86	87	
	21	22	23	24	25	26	27	
72	73	74	75	76	77	78	79	
	14	15	16	17	18	19	20	
64	65	66	67	68	69	70	71	
	7	8	9	10	11	12	13	
56	57	58	59	60	61	62	63	
	0	1	2	3	4	5	6	

Рис. 3. Пример расчетной сетки

Решение задачи дифракции на экранах сложной геометрической формы субиерархическим методом

Описанный выше алгоритм позволяет получить решение задачи на экране канонической формы. Рассмотрим алгоритм построения решения задачи дифракции на экранах сложной геометрической формы [9–19]. Воспользуемся матрицей A , полученной методом Галеркина для прямоугольного экрана Π . Для решения задачи на экране сложной геометрической формы Ω необходимо, чтобы новый экран полностью помещалось в экран Π .

Введем вектор W , описывающий геометрию фигуры. Если носитель Π_i ($i=1, \dots, N$) принадлежит экрану Ω , то $W_i=1$, иначе $W_i=0$. Решая СЛАУ итерационным методом, будем поэлементно перемножать вектор геометрии на вектор решений. Таким образом, система будет решаться на некоторой подматрице A' матрицы A . Подробное обоснование субиерархического метода приведено в [9].

Из уравнения $A'\psi = f$ находим решение рассматриваемой задачи для экрана сложной геометрической формы. На рис. 6–8 представлен пример расчета поверхностных токов для фигуры сложной геометрической формы. Примеры решения рассматриваемой задачи на различных экранах различными методами представлены в [6, 8, 10].

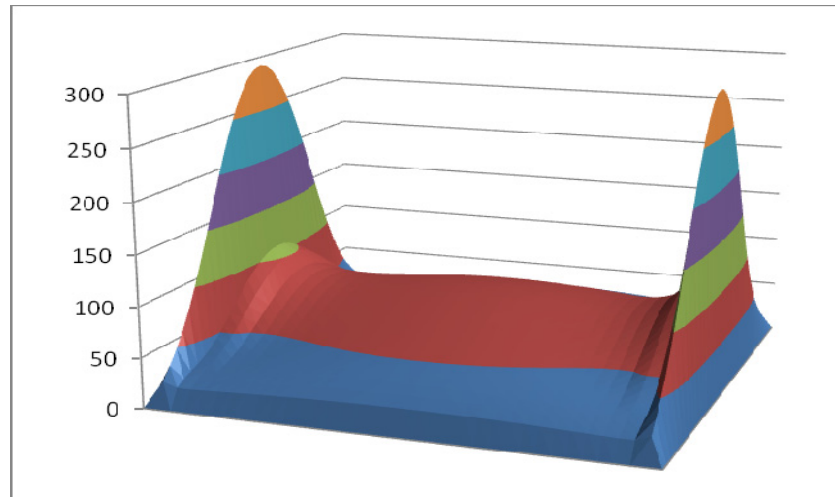


Рис. 4. Поверхностные токи $/J_x/$

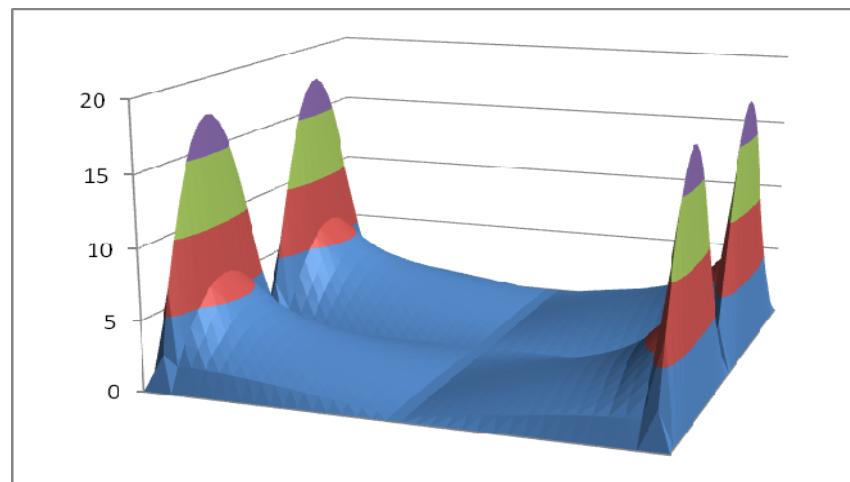


Рис. 5. Поверхностные токи $/J_y/$

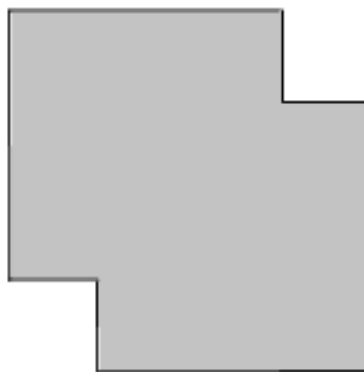


Рис. 6. Геометрия экрана

Для экрана, представленного на рис. 9, были построены графики (рис. 10, 11). Фигура вырезалась из квадратной пластины размером $\lambda \times \lambda$.

Было произведено теоретическое исследование задачи дифракции электромагнитного поля на экранах сложной формы. Получены численные результаты для решения уравнения электрического поля.

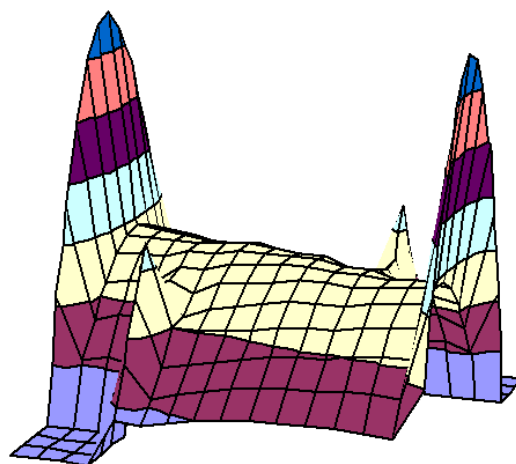


Рис. 7. Поверхностные токи

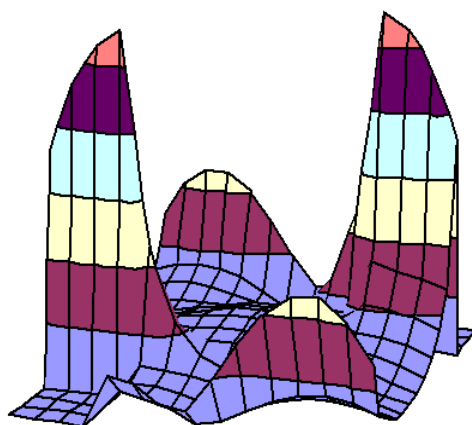


Рис. 8. Поверхностные токи

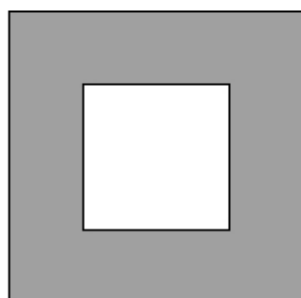


Рис. 9. Геометрия экрана

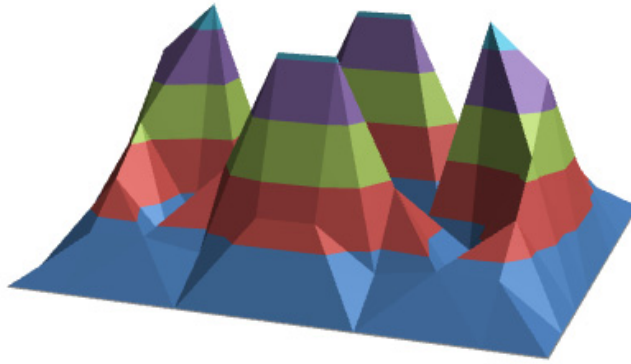


Рис. 10. Поверхностные токи

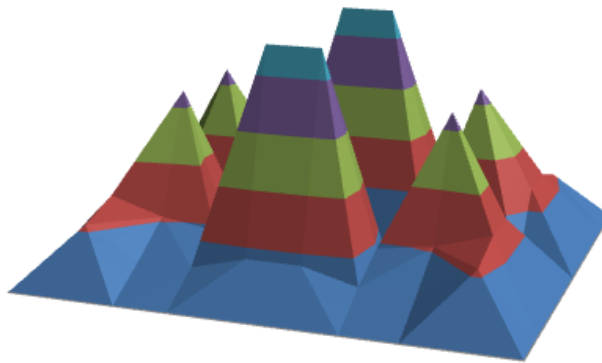


Рис. 11

Разработанные алгоритмы и программы могут быть использованы при решении векторных задач электродинамики и при математическом моделировании сложных электродинамических процессов и объектов.

Список литературы

1. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и связь, 1998. – 160 с.
2. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : Радиотехника, 1996. – 176 с.
3. **Трибель, Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М. : Мир, 1980. – 664 с.
4. **Hänninen, I.** Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions / I. Hänninen, M. Taskinen and J. Sarvas // Prog. Electromagn. Res. PIER. – 2006. – V. 63. – P. 243–278.
5. **Медведик, М. Ю.** Применение функций крышек для решения задачи дифракции электромагнитных волн для решения задачи дифракции на экранах сложной формы / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. – № 3 (23). – С. 84–98.
6. **Rao, S. M.** Electromagnetic Scattering by Surface of Arbitrary Shape / S. M. Rao, D. R. Wilton and A. W. Glisson // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1982. – V. Ap-30. – P. 409–417.
7. **Смирнов, Ю. Г.** О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и о решении уравнения электриче-

- ского поля / Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 4, № 1. – С. 129–139.
8. **Zwamborn, P. M.** A Weak Form of the Conjugate Gradient FFT Method for Plate Problems / Peter M. Zwamborn and Peter M. van den Berg // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1991. – V. 39. – P. 224–228.
 9. **Медведик, М. Ю.** Применение субиерархического метода в задачах электродинамики / М. Ю. Медведик // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 87–97.
 10. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
 11. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. – 2004. – № 5. – С. 5–19.
 12. **Антонов, А. В.** Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД-технологий / А. В. Антонов, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 4. – С. 60–67.
 13. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, № 4. – С. 441–446.
 14. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
 15. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод для решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 59–70.
 16. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический подход для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле в волноводе методом коллокации / М. Ю. Медведик, Д. А. Миронов, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.
 17. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 8. – С. 940–945.
 18. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана – Швингера на телах сложной формы / М. Ю. Медведик // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 2. – С. 175–180.
 19. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод для решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 3. – С. 281–290.

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuri Gennadyevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yuryevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Максимова Марина Александровна

аспирант, Пензенский
государственный университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Maximova Marina Alexandrovna

Postgraduate student,
Penza State University

УДК 517.6

Смирнов, Ю. Г.

Решение задачи дифракции электромагнитной волны на экранах сложной формы / Ю. Г. Смирнов, М. Ю. Медведик, М. А. Максимова //
Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 4 (24). – С. 59–72.